Egzamin z Analizy Matematycznej II.1

3 lutego 2023, 10:30-13:25

Rozwiązanie każdego zadania **należy** umieścić na **osobnej kartce**, wyraźnie podpisanej (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

Nalcży szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia udowodnione na wykładzie lub ćwiczeniach.

Zadanie 1. (15p.) Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia

$$\mathrm{D}_1 f(x,y) + 2x\mathrm{D}_2 f(x,y) = 0 \quad \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Wykazać, że istnieje funkcja różniczkowalna $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x,y) = g(y - x^2)$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Uwaga: $\mathrm{D}_i f$ oznacza pochodną cząstkową f po i-tej zmiennej, dla $i \in \{1,2\}$.

Zadanie 2. (20p) Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$\phi(x) = \phi\big((x_1, x_2, x_3)\big) = \sqrt{(x_1 + \sqrt{2}x_2)^2 + x_1^2 + x_3^2},$$

a $\|x\|_2$ niech oznacza normę euklidesową wektora $x \in \mathbb{R}^3$.

a) (5p) Wykazać, że ϕ jest normą w $\mathbb{R}^3$.

b) (15p) Znaleźć największą stałą c_1 taką, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^3} \quad c_1\|x\|_2 \leqslant \phi(x)$$

oraz najmniejszą stałą c_2 taką, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^3} \quad \phi(x) \leqslant c_2\|x\|_2.$$

Zadanie 3. (15p) Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[\frac{1}{n},\infty)} \frac{n(x^{n-4}+1)}{3 + x^{n-2} + x^n} \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) d\lambda_1(x).$$

Zadanie 4. (15p) Obliczyć $\lambda_3(A)$, gdy

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 < \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 2z\}.$$

Zadanie 5. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian drugiego stopnia $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, który spełnia wszystkie poniższe warunki.

- Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x,y) = w(x,y,0)$ ma minimum lokalne w $(0,0)$.
- Funkcja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $g(y,z) = w(0,y,z)$ ma minimum lokalne w $(0,0)$.
- W dowolnym otoczeniu otwartym punktu $(0,0,0)$ znajduje się taki punkt (x,y,z), że $w(x,y,z) < w(0,0,0)$.